

Мультистабильность, удвоения периода и подавление бегущих волн шумовым воздействием в нелинейной автоколебательной среде с периодическими граничными условиями

А. В. Слепнев, Т. Е. Вадивасова, А. С. Листов

Саратовский государственный университет
410026, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83
a.v.slepnev@gmail.com, tanya@chaos.ssu.runnet.ru

Получено 10 марта 2010 г.

Исследуется модель автоколебательной среды, элемент которой представляет собой автогенератор Анищенко–Астахова. При периодических граничных условиях в среде наблюдается мультистабильность: сосуществуют устойчивые автоколебательные моды с различной пространственной структурой, реализуемые при соответствующем выборе начальных условий. Для различных мод проведено исследование бифуркаций удвоения периода колебаний во времени. Показано, что между двумя последовательными бифуркациями моды претерпевают эволюцию, ведущую к постепенному усложнению мгновенного пространственного профиля и возникновению мелкомасштабных пространственных осцилляций. Для различных режимов исследовано распределение мгновенного сдвига фазы колебаний вдоль длины системы. Рассмотрено влияние на пространственные структуры локального источника шума. Показано, что под воздействием шума могут происходить переключения между различными режимами. Исследован механизм таких переключений.

Ключевые слова: автоколебательная среда, удвоение периода, пространственные структуры, мультистабильность, шумовое воздействие

A. V. Slepnev, T. E. Vadivasova, A. S. Listov

Multistability, period doubling and traveling waves suppression by noise excitation in a nonlinear self-oscillatory medium with periodic boundary conditions

The model of a self-oscillatory medium whose cells represent Anishchenko–Astakhov self-sustained oscillators is studied. Under periodic boundary conditions the phenomenon of multistability is observed in the medium — the stable self-sustained oscillatory modes with different spatial structures coexist and can be realized by means of appropriately chosen initial conditions. The study of the time period doubling bifurcations is performed for different modes. It is shown that the evolution of the modes between two successive bifurcations leads to the complexification of instantaneous spatial profile and to the appearance of small-scale spatial oscillations. The distribution of the instantaneous phase shift along the medium is studied in different regimes. The influence of local noise source on the spatial structures is considered. It is demonstrated that noise can induce switchings between different regimes. The mechanism of such switchings is explored.

Keywords: self-oscillatory medium, period doubling, spatial structures, multistability, noise excitation

MSC 2010: 70Kxx, 39Axx



Введение

Автоколебательная среда — это распределенная автономная нелинейная диссипативная система с непрерывными пространственными координатами и временем, элементы которой совершают колебания, характеристики которых (амплитуды, фазы, спектр частот) в некоторых пределах не зависят от начального состояния среды и определяются ее параметрами. Примером автоколебательной среды может служить колебательная химическая реакция в большом объеме, различные части которого совершают колебания с различными амплитудами и фазами [1]. Периодические, квазипериодические и хаотические автоколебания были обнаружены экспериментально и численно во многих распределенных системах различной природы и их математических моделях: в потоках жидкости [2, 3], в плазме [4, 5], в химических реакциях [1, 6, 7, 8], в оптических системах [9, 10], в биофизических объектах и живых тканях [11, 12]. В силу разнообразия задач, связанных с автоколебательными средами, и множества наблюдаемых явлений, несмотря на большое количество публикаций, поведение автоколебательных сред все еще не является в достаточной степени изученным.

Наиболее известной и детально изученной математической моделью автоколебательной среды является уравнение Гинзбурга–Ландау [13]. Оно описывает поведение комплексной амплитуды автоколебаний в слабонелинейной среде. Можно представить такую среду как состоящую из очень большого числа маленьких автоколебательных ячеек (элементов). Отдельный элемент представляет собой квазигармонический автогенератор и сам по себе может совершать только близкие к гармоническим колебания. Несмотря на простую динамику отдельного элемента, поведение среды может быть очень сложным (турбулентным) [14, 15]. Сложные колебания во времени и пространстве являются, в данном случае, результатом взаимодействия большого числа элементов среды.

Можно предположить существование среды, отдельный элемент которой обладает сильно нелинейными свойствами и сам может демонстрировать сложное поведение (без воздействия соседних элементов). На сегодняшний день модели таких сред в непрерывном представлении практически не рассматривались. Изучались только очень упрощенные модели, представляющие собой цепочки и решетки отображений последования (и время, и пространственная координата — дискретны) [16, 17, 18], или цепочки, состоящие из сравнительно небольшого числа автогенераторов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (время — непрерывно, пространственная координата — дискретна) [19, 20, 21, 27]. Такие модели, по-видимому, отчасти отражают поведение нелинейных автоколебательных сред, но даже качественное соответствие режимов не является полным.

В данной работе предлагается модель автоколебательной среды, элемент которой, при определенном выборе параметров, обладает сложной динамикой и демонстрирует бифуркации удвоения периода и динамический хаос. Целями работы являются исследование бифуркационного сценария удвоения периода колебаний во времени для различных сосуществующих в системе мод, установление закономерностей эволюции пространственных профилей различных мод при увеличении параметра возбуждения, а также изучение влияния шумового воздействия на поведение среды в режиме мультистабильности.

1. Модель автоколебательной среды и методы ее исследования

Для того чтобы сконструировать модель автоколебательной среды со сложной динамикой, в качестве элементарной ячейки среды был взят генератор с инерционной нелиней-

ностью Анищенко–Астахова (ГИН) [22], задаваемый уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= mx + y - xz, \\ \frac{dy}{dt} &= -x, \\ \frac{dz}{dt} &= -gz + g\Phi(x),\end{aligned}\tag{1.1}$$

где $\Phi(x) = \frac{x}{2}(x + |x|)$, x, y, z — безразмерные динамические переменные, t — безразмерное время, а m и g — управляющие параметры системы. Замкнув цепочку из N таких генераторов с диффузионной (резистивной) связью в кольцо и перейдя к $N \rightarrow \infty$ и бесконечно малому размеру ячейки, можно получить модель автоколебательной среды в виде следующей системы уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= mx + y - xz + \gamma \frac{\partial^2(x - y)}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -x, \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= -gz + g\Phi(x),\end{aligned}\tag{1.2}$$

где x, y, z являются функциями уже не только времени, но и безразмерной пространственной координаты s , а γ — коэффициент диффузии, определяемый величиной связи между соседними ячейками.

Среда исследовалась с периодическими граничными условиями:

$$\begin{aligned}\forall t \quad x(0, t) &= x(L, t), \quad y(0, t) = y(L, t), \quad z(0, t) = z(L, t); \\ \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} \Big|_{s=0} &= \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} \Big|_{s=L}, \quad \frac{\partial y(s, t)}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{\partial y(s, t)}{\partial s} \Big|_{s=L}, \\ \frac{\partial z(s, t)}{\partial s} \Big|_{s=0} &= \frac{\partial z(s, t)}{\partial s} \Big|_{s=L},\end{aligned}\tag{1.3}$$

где L — длина системы. Во всех численных экспериментах фиксировалась длина системы $L = 100$ безразмерных единиц, коэффициент диффузии $\gamma = 0.1$ и параметр $g = 0.2$. Параметр m изменялся от 0.9 до 1.5.

Система (1.2) интегрировалась с использованием спектрального метода. Для каждого исследуемого режима число учитываемых пространственных гармоник подбиралось таким образом, чтобы дальнейшее увеличение числа гармоник уже не приводило к существенным изменениям формы колебаний в пространстве и времени. Чем более сложным был исследуемый режим, тем большее число пространственных гармоник учитывалось. Приемлемая точность вычислений в режиме динамического хаоса достигается только при очень большом количестве учитываемых гармоник. По этой причине хаотическая динамика среды в рамках данной работы практически не рассматривалась. В результате численного интегрирования строились проекции фазовых траекторий в отдельных точках среды, а также мгновенные пространственные профили для одной из переменных.

Мгновенным пространственным профилем колебаний среды будем называть распределение $x(s)$ в фиксированный момент времени t_0 , соответствующий определенному состоянию среды в точке $s = 0$. В проведенных расчетах обычно выбиралось состояние, в котором $x(0, t_0) = 0 \pm 10^{-3}$, $y(0, t_0) > 0$. В установившемся режиме периодических во времени

колебаний пространственный профиль данной моды полностью повторяется через период колебаний. Если колебания не являются периодическими (квазипериодический или хаотический режим), то даже для установившихся колебаний мгновенный профиль не повторяется, и каждый раз, при заданном состоянии в точке $s = 0$, мы получаем новый профиль.

Выбор той или иной устойчивой моды первоначально достигался заданием пространственного периода гармонических начальных условий. «Настройка» на нужную моду проводилась в квазигармоническом режиме, затем выбранный режим отслеживался при движении с малым шагом по параметру. При значениях параметров, указанных выше, в системе сосуществует несколько устойчивых пространственных мод с различными волновыми числами: $k = 0$ (пространственно-однородный режим) и $k = 2\pi n/L$ (пространственно-неоднородные режимы, т. е. режимы бегущих волн), где $n = 1, 2, 3$ — число длин волн, укладывающихся на длине системы в квазигармоническом режиме (рис.1). В работе ис-

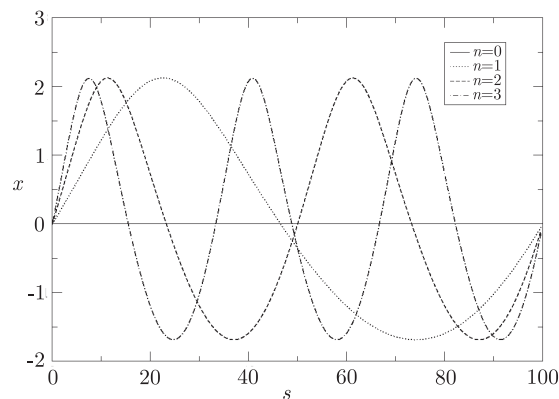


Рис. 1. Мгновенные пространственные профили режимов, сосуществующих в среде (1.2) при $m = 0.96$.

следовалась эволюция мгновенных профилей с ростом параметра возбуждения m , а также влияние аддитивного гауссова белого шума на пространственно-временное поведение мультистабильной среды. Одной из основных характеристик режима, служащей важным инструментом исследования, является мгновенное распределение сдвига фазы пространственных колебаний вдоль длины системы. Его зависимость от пространственной координаты рассчитывалась по формуле

$$\varphi(s) = \Phi(0) - \Phi(s), \quad \Phi(s) = -\arctg \frac{y(s, t_0)}{x(s, t_0)} \pm \pi i, \quad (1.4)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, \quad t_0 = \text{const},$$

где значение i выбиралось исходя из условия непрерывности функции $\Phi(s)$. С помощью этой характеристики из условия

$$n = \frac{\varphi(L)}{2\pi} \quad (1.5)$$

можно определить число n в данном режиме. В случае квазигармонических колебаний, когда пространственный профиль имеет форму, близкую к синусоидальной, n показывает, сколько раз длина волны укладывается вдоль длины системы, и может быть легко определено по виду мгновенного профиля (см. рис. 1). Однако с ростом параметра возбуждения m профиль любого из сосуществующих режимов сильно усложняется, и определить числа n

и k по виду профиля становится невозможно. Выражение (1.5) позволяет определять n в любом режиме. Будем называть число n , задаваемое выражением (1.5), номером моды. С помощью числа n можно различать и отслеживать различные моды при любом характере колебаний во времени и для любого вида пространственного профиля. Моде с данным номером соответствует определенное волновое число:

$$k = \frac{\varphi(L)}{L} = \frac{2\pi n}{L}. \quad (1.6)$$

2. Исследование эволюции различных типов колебаний в однородной среде при изменении управляющего параметра

При значении параметра $m = 0.96$ в каждом элементе среды наблюдаются квазигармонические колебания во времени, аналогичные колебаниям в одиночном генераторе Анищенко–Астахова при тех же параметрах. Пространственно-однородный режим $n = 0$ соответствует колебаниям всех точек среды в одной фазе: $\varphi(s) = 0$. В силу однородности самой среды ($m = \text{const}$, $g = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$) колебания во всех ее точках в этом случае совершенно одинаковы. Пространственно-неоднородные моды $n = 1, 2$ и 3 в квазигармоническом режиме колебаний во времени представляют собой бегущие волны с квазигармоническим пространственным профилем и различной длиной волны $\lambda = \frac{L}{n}$ (рис. 1). Сдвиг фазы линейно нарастает вдоль среды (рис. 2). Для моды $n = 1$ в квазигармоническом режиме на длине системы укладывается одна волна («одноволновая» мода). Для $n = 2$ на длине системы укладывается две длины волны («двухволновая» мода), и т. д. Исследуем переход к коле-

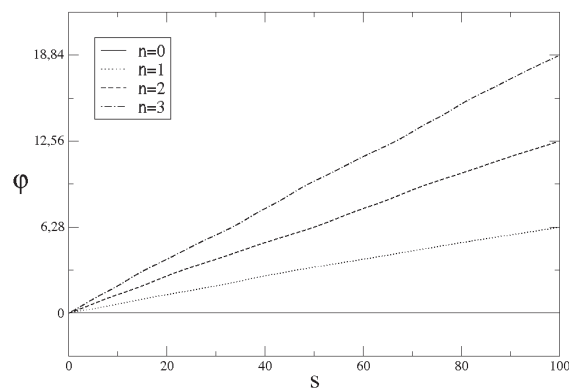


Рис. 2. Мгновенные распределения сдвига фазы $\varphi(s)$ вдоль длины системы при $m = 0.96$.

баниям удвоенного периода, наблюдающийся с ростом параметра m для всех устойчивых мод. Как оказалось, механизм перехода для пространственно-однородного режима $n = 0$ и для режимов бегущих волн $n = 1, 2, 3$ различен.

Для пространственно-однородной моды $n = 0$ в среде переход к колебаниям удвоенного во времени периода осуществляется через бифуркацию удвоения так же, как в отдельно взятом автономном ГИН, задаваемом системой уравнений (1.1). Дальнейшая эволюция характера колебаний во времени для однородного режима с ростом параметра m повторяет эволюцию режимов ГИН вплоть до критического значения, соответствующего возникнове-

нию хаотических во времени колебаний. В области хаотической динамики однородный режим не наблюдается. Так как эволюция однородного режима колебаний среды не содержит новых явлений по сравнению с отдельно взятой колебательной ячейкой (ГИН), в рамках данной работы она не рассматривалась.

Проведенные исследования показали, что для пространственно-неоднородных мод $n = 1, 2, 3$ переход к колебаниям удвоенного периода осуществляется иначе, чем для однородной моды. Результаты, представленные на рисунке 3, иллюстрируют данный переход для случаев $n = 1$ и $n = 2$. Аналогичные результаты были получены и для $n = 3$. Для пространственно-неоднородных мод удвоению периода предшествует возникновение двухчастотных квазипериодических во времени колебаний, которые существуют в некоторой области значений параметра t . Мгновенный пространственный профиль в этом режиме не повторяется с течением времени и вследствие этого «размазывается» (рис. 3b, c). Для того чтобы убедиться в квазипериодическом характере колебаний, использовалось построение сечения Пуанкаре фазового портрета в выбранной точке пространства. В бесконечномерном фазовом пространстве распределенной системы двухчастотным квазипериодическим колебаниям соответствует двумерный тор, сечение Пуанкаре которого представляет собой замкнутую инвариантную кривую. Полученная проекция инвариантной кривой представлена на рисунке 4. При дальнейшем увеличении параметра t наблюдается резонанс на торе

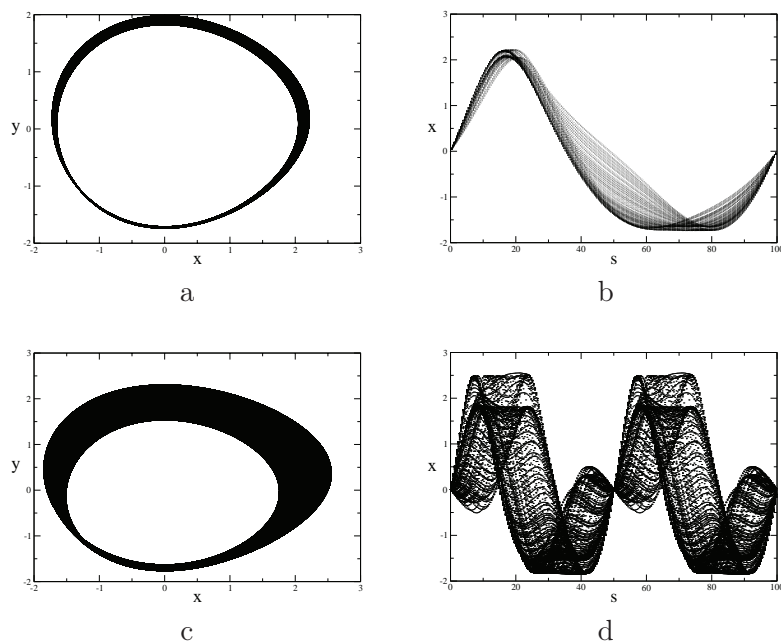


Рис. 3. Фазовые портреты в точке $s = 25$ (a, c) и пространственные профили (b, d) режимов $n = 1$ ($t = 0.968$) и $n = 2$ ($t = 0.988$) при переходе к колебаниям удвоенного во времени периода.

и колебания во времени снова становятся периодическими, но уже с удвоенным периодом. Можно отметить, что возникновение квазипериодических колебаний и переход к циклам удвоенного периода через резонанс на торе наблюдается для несинфазных режимов в системе двух взаимодействующих генераторов с бифуркациями удвоения периода [25]. Квазипериодические во времени колебания были обнаружены для пространственно-неоднородных режимов в цепочках логистических отображений [16, 17, 18] и автогенераторов Чуа [21]. В этом отношении непрерывная среда ведет себя подобно пространственно-дискретным мо-

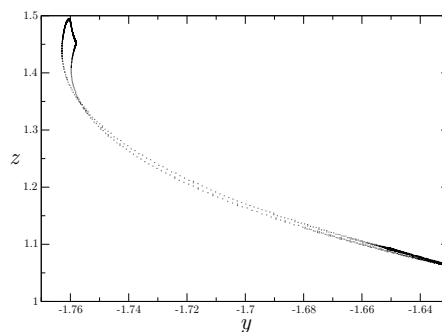


Рис. 4. Сечение Пуанкаре плоскостью $x = 0$ в точке $s = 25$ для моды $n = 2$ при $m = 0.988$.

делям. Меняя параметр m для мод $n = 1, 2, 3$, можно наблюдать еще одно удвоение периода колебаний, происходящее по тому же самому сценарию. Далее квазипериодические колебания разрушаются и возникает хаотическое во времени поведение.

Рассмотрим, что происходит с мгновенным пространственным профилем бегущих волн между двумя последовательными бифуркациями удвоения периода. Проведенные расчеты показывают, что пространственный профиль каждой пространственно-неоднородной моды постепенно усложняется. Увеличивая m , можно наблюдать, как «горбы» и «впадины» на мгновенном пространственном профиле трансформируются, образуя все новые экстремумы. Возникают все более мелкомасштабные пространственные осцилляции. Соответствующие результаты, полученные для моды $n = 1$ представлены на рисунке 5. Для мод $n = 2$ и $n = 3$ эволюция пространственных профилей качественно аналогична случаю «одноволновой» моды.

Наблюдаемое в непрерывной среде (1.2) усложнение пространственного профиля не было зафиксировано в пространственно-дискретной модели автоколебательной среды с удвоениями периода колебаний во времени, исследованной в [21]. Возможно, это объясняется слишком малым количеством автогенераторов в цепочке, моделирующей среду. Таким образом, в работе обнаружен качественно новый эффект, присущий именно пространственно-непрерывной среде.

Выясним, зависят ли бифуркационные значения параметра m от номера выбранной моды (или, что то же самое, от волнового числа k). Под бифуркационными значениями $m_{1,2}$ в данном исследовании понимались значения параметра m , при которых происходило разрушение квазигармонического режима и режима колебаний удвоенного периода. Численно построенные зависимости m_1 и m_2 от номера n приведены на рисунке 6. Полученные результаты говорят о том, что для разных мод бифуркационные значения параметра возбуждения оказываются неодинаковыми.

Исследуем распределение сдвига фазы $\varphi(s)$ колебаний вдоль длины системы. Для квазигармонического режима $\varphi(s)$ линейно растет с ростом пространственной координаты s так, что полный сдвиг фазы на длине системы составляет $2\pi n$ (рис. 2). При увеличении параметра возбуждения после первой бифуркации удвоения периода поведение сдвига фазы заметно отклоняется от линейной зависимости и носит довольно сложный немонотонный характер (рис. 7). Этому соответствует эволюция пространственного профиля, приведенная на рисунке 5. Мгновенный профиль пространственно-неоднородного режима становится сложным, так что по его виду невозможно определить длину волны и говорить об «одноволновом» или «двухволновом» режиме. Тем не менее, сдвиг фазы на длине системы не меняется, оставаясь для каждой моды постоянным и равным $2\pi n$. В квазипериодическом

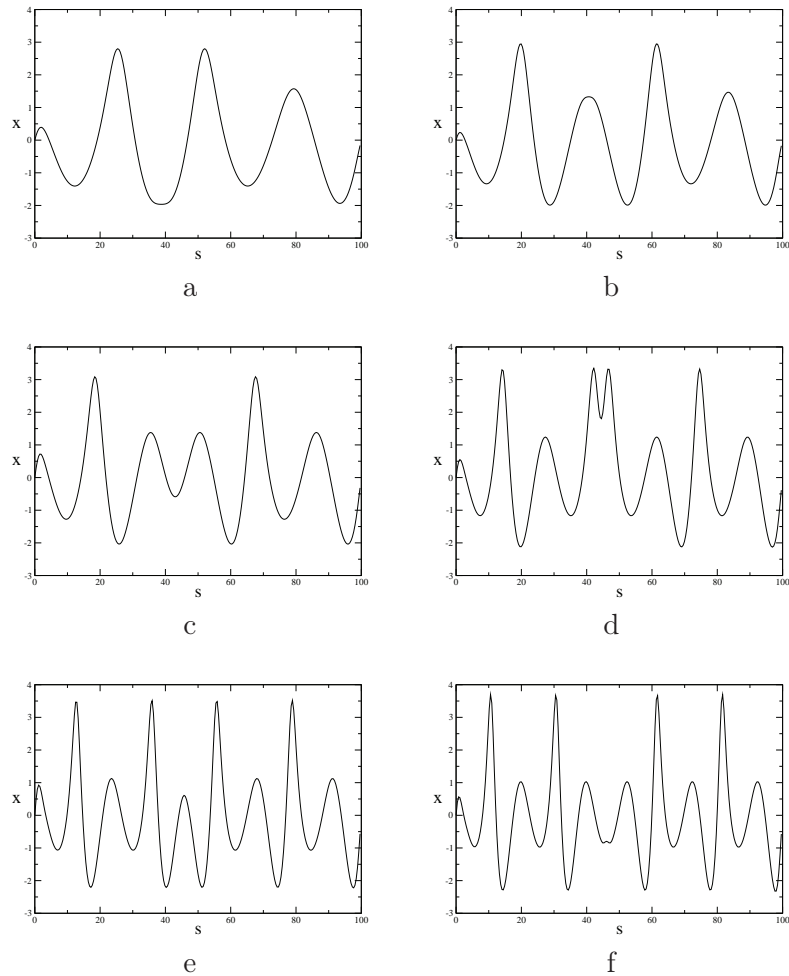


Рис. 5. Эволюция пространственного профиля моды $n = 1$ с ростом m : $m = 1.03$ (а), 1.06 (б), 1.09 (с), 1.15 (д), 1.21 (е) и 1.27 (ф).

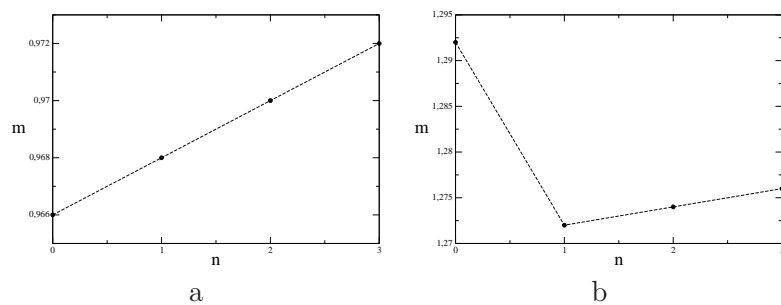


Рис. 6. Бифуркационные значения параметра возбуждения для первой (а) и второй (б) бифуркаций в зависимости от номера моды n .

и хаотическом режимах значение сдвига фазы на длине системы $\varphi(L)$ несколько отличается для различных реализаций мгновенного профиля. В этом случае для определения номера n требуется рассматривать среднее значение $\varphi(L)$. Зная номер n , можно определить среднюю фазовую скорость моды как

$$\bar{v}_\Phi(n) = \frac{\omega_0 L}{2\pi n}, \quad (2.1)$$

где ω_0 — базовая частота колебаний, которая практически одинакова для всех мод и слабо зависит от параметра m . Таким образом, средняя фазовая скорость для каждой моды является почти постоянной. Поэтому по величине сдвига фазы на длине системы можно судить о том, какой моде соответствует данный пространственный профиль.

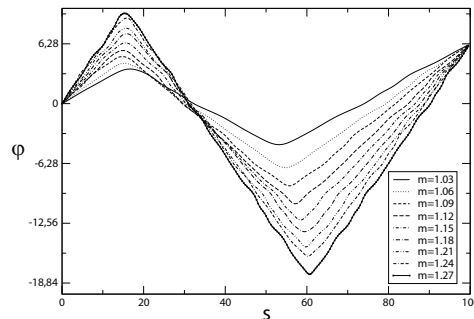


Рис. 7. Эволюция мгновенного распределения сдвига фазы с ростом параметра возбуждения для моды $n = 1$.

3. Влияние шума на поведение мультистабильной среды

Рассмотрим влияние аддитивного гауссова белого шума (ГБШ) на поведение автоколебательной среды. Для этого в первое уравнение системы (1.2) введем слагаемое вида $\xi(s, t) = \sqrt{2D}F(s)n(t)$, описывающее источник локального пространственно-коррелированного ГБШ. Здесь $n(t)$ — источник нормированного гауссова белого шума, D — константа, характеризующая интенсивность шума, функция $F(s)$ задает локализацию источника шума в пространстве. Эта функция выбиралась таким образом, чтобы на все точки среды, расположенные в интервале $s \in [(L - l)/2; (L + l)/2]$ (l — ширина области шумового воздействия), действовала одна и та же некоррелированная во времени случайная сила с гауссовым распределением и интенсивностью D . Вид функции $F(s)$ при $l = 10$ представлен на рисунке 8. Рассматриваемая модель локального случайного воздействия может отражать некоторые реальные ситуации (например, когда речь идет о живых тканях, определенные участки которых подвергаются воздействию внешних сигналов).

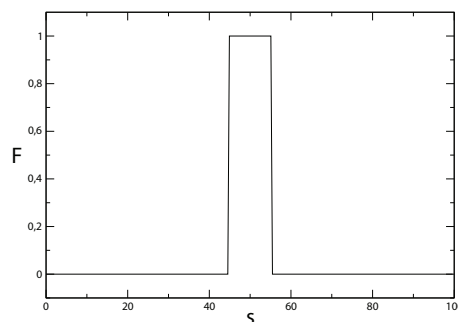


Рис. 8. Вид функции, определяющей область шумового воздействия.

В ходе данной работы было установлено, что шум вызывает переключения с одних мод на другие и, таким образом, с помощью изменения интенсивности шума можно управ-

лять режимами автоколебательной среды (1.2). Похожие эффекты наблюдались в кольце из конечного числа периодических генераторов [26]. С увеличением интенсивности шума при некотором ее значении $D = D_{\text{кр}}(n)$ осуществляется переход с режима бегущей волны с номером n на режим с номером $n - 1$ (рис. 9). Возвращение в режим с номером n ни

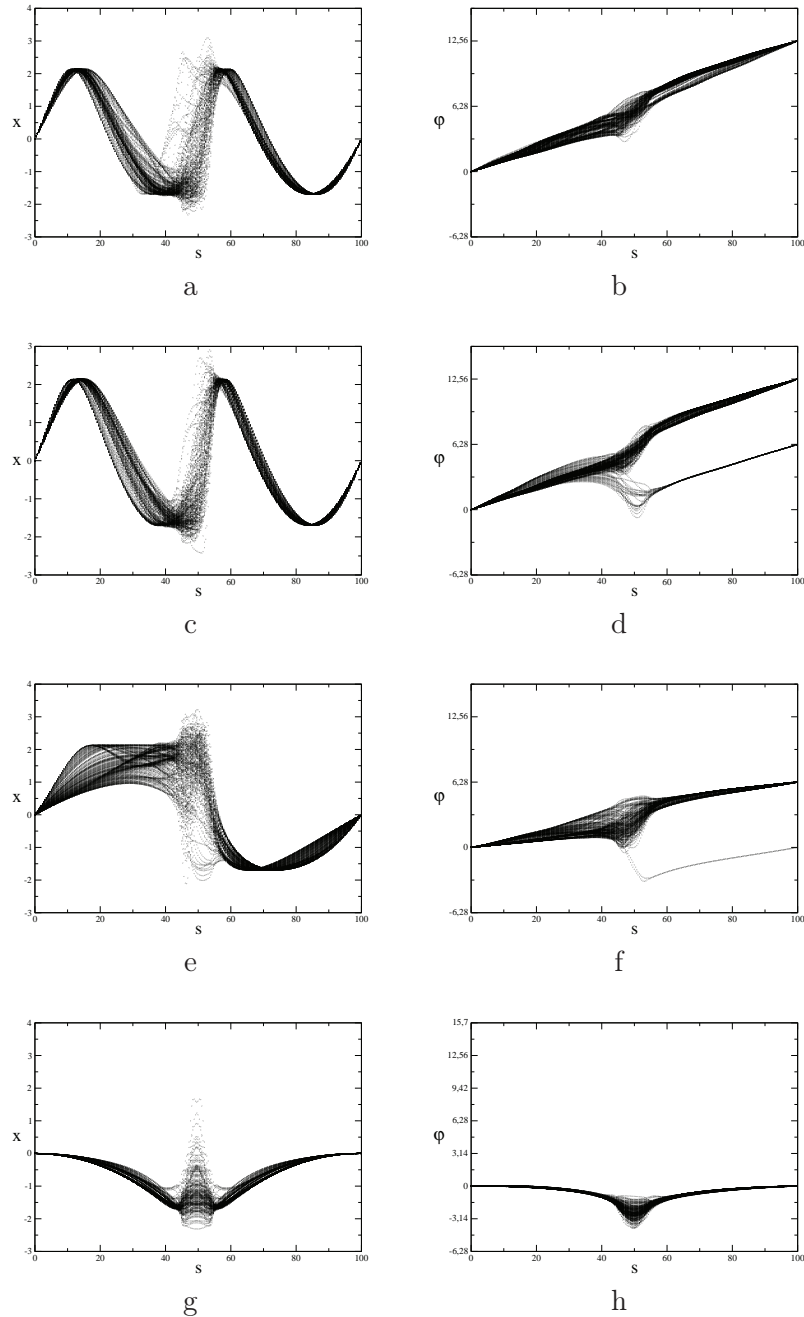


Рис. 9. Пространственные профили (а, с, е, г) и распределения сдвигов фазы (b, d, f, h) для $n = 2$ при различных интенсивностях шума ($D = 0.0120, 0.0130, 0.0140$ и 0.0150 , сверху вниз).

с течением времени, ни при изменении начальных условий не происходит. Таким образом, можно говорить о том, что шум подавляет пространственно-неоднородные моды, начиная

с больших значений номера n . При достаточно сильном шуме в кольце можно наблюдать только зашумленный пространственно-однородный режим, которому соответствует нулевой средний сдвиг фазы на всей длине системы: $\langle \varphi(L) \rangle = 0$.

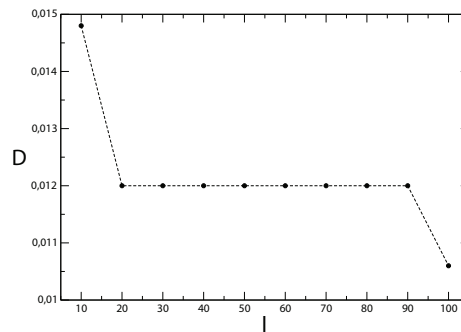


Рис. 10. Значение $D_{кр}(1)$ в зависимости от ширины области шумового воздействия l .

Рассмотрим влияние ширины области шумового воздействия на переключения режимов бегущих волн. Соответствующие результаты для $n = 1$ представлены на рисунке 10. Как можно было ожидать, в целом при увеличении ширины области шумового воздействия значение интенсивности шума $D_{кр}(n)$, при котором происходит смена режимов пространственных колебаний, уменьшается. В то же время, в широких пределах изменения области шумового воздействия критическое значение интенсивности шума $D_{кр}(1)$ остается постоянным. Следует отметить, что локальный характер шумового воздействия не приводит к принципиально новым эффектам по сравнению с глобальным воздействием случайной силы на всю среду. В последнем случае наблюдаются те же самые переключения режимов, но при меньших значениях интенсивности шума.

4. Заключение

Проведено исследование поведения среды, смоделированной на основе автоколебательных ячеек, демонстрирующих бифуркации удвоения. Полученные результаты подтвердили ряд эффектов, полученных ранее для пространственно-дискретных моделей. К таким эффектам относятся сложный сценарий удвоения периода колебаний во времени, связанный с появлением квазипериодических режимов, конечное число удвоений и переход к хаосу через разрушение квазипериодических колебаний [21], а также вызванные шумом переключения между волновыми модами, приводящие к уменьшению волнового числа [26]. Особенностью непрерывной среды, обнаруженной в проведенных исследованиях, является эффект постепенного усложнения пространственного профиля бегущей волны с ростом параметра возбуждения, выражающегося в дроблении масштаба пространственных осцилляций. Для моделей с дискретной пространственной координатой такой эффект не наблюдался. Таким образом, пространственно-дискретные модели лишь отчасти могут описать динамику непрерывной среды. Также установлены немонотонный характер распределения сдвига фазы вдоль пространственной координаты и факт сохранения его постоянным на всей длине системы для каждой моды при усложнении колебаний во времени и пространстве.

Следует отметить, что хотя предлагаемая модель среды является скорее искусственной и не имеет прямого отношения к какой-либо реальной автоколебательной среде, демонстрируемое ею поведение может оказаться типичным для широкого класса нелинейных автоколебательных сред со сложной динамикой элементарной ячейки.

Авторы выражают благодарность профессору Анищенко В. С. за интерес, проявленный к работе, и советы при ее подготовке.

Работа выполнена при поддержке CRDF (грант No. BP4M06) и Министерства образования и науки РФ в рамках АБЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» (грант № 2.2.2.2/229).

Список литературы

- [1] Полак Л. С., Михайлов А. С. Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах. М.: Наука, 1983. 283 с.
- [2] Gollub J. P., Benson S. V. Many routes to turbulent convection // J. Fluid Mech., 1980, vol. 100, no. 3, pp. 449–470.
- [3] Brandstater A., Swift J., Swinny H. L., Wolf A. Low-dimensional chaos in a hydrodynamic systems // Phys. Rev. Lett., 1983, vol. 51, no. 6, pp. 1442–1445.
- [4] Loarte A., Monk R. D., Kukushkin A. S., Right E., Campbell D. J., Conway C. D., Maggi C. F. Self-sustained divertor plasma oscillations in the JET Tokamak // Phys. Rev. Lett., 1999, vol. 83, no. 18, pp. 3657–3660.
- [5] Schwabe M., Rubin-Zuzic S., Thomas H. M., Morfill G. E. Highly resolved self-excited density waves in a complex plasma // Phys. Rev. Lett., 2007, vol. 99, 095002, 4 p.
- [6] Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves and turbulence. (Springer Ser. Synergetics, vol. 19.) Berlin: Springer, 1984. 156 p.
- [7] Epstein I. R., Pojman J. A. An introduction to nonlinear chemical dynamics: Oscillations, waves, patterns, and chaos. New York: Oxford Univ. Press, 1998. 480 p.
- [8] Yashin V. V., Balazs A. C. Pattern formation and shape changes in self-oscillating polymer gels // Science, 2006, vol. 314, p. 798–801.
- [9] Jumoto J., Otsuka K. Frustrated optical instability: self-induced periodic and chaotic spatial distribution of polarization in nonlinear optical media // Phys. Rev. Lett., 1985, vol. 54, no. 16, pp. 1806–1809.
- [10] Law C. T., Kaplan A. E. Dispersion-related multimode instabilities and self-sustained oscillations in nonlinear counterpropagating waves // Opt. Lett., 1989, vol. 14, no. 14, pp. 734–739.
- [11] Плюснина Т. Ю., Лаврова А. И., Ризниченко Г. Ю., Рубин А. Б. Моделирование неоднородного распределения и колебаний трансмембранного потенциала и pH вблизи внешней стороны мембраны клетки водорослей *Chara corallina* // Биофизика, 2005, т. 50, № 3, с. 492–499.
- [12] Zuckermann M. Self-sustained potential oscillations and the main phase transition of lipid bilayers // Biophys. J., 2009, vol. 64, no. 5, pp. 1369–1370.
- [13] Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны. М.: Наука, 2000. 272 с.
- [14] Chate H., Manneville P. Phase diagram of two-dimensional complex Ginzburg–Landau equation // Phys. A, 1996, vol. 224, pp. 348–368.
- [15] Shraiman B. I., Pumir A., van Saarloos W., Hohenberg P. C., Chate H., Holen M. Spatiotemporal chaos in the one-dimensional complex Ginzburg–Landau equation // Phys. D, 1992, vol. 57, pp. 241–248.
- [16] Kaneko K. Spatiotemporal chaos in one- and two-dimensional map lattices // Phys. D, 1989, vol. 32, pp. 60–82.
- [17] Кузнецов А. П., Кузнецов С. П. Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса // Изв. вузов. Сер. Радиофизика, 1991, т. 34, № 10–12, с. 1079–1115.

- [18] Астахов В. В., Безручко Б. П., Пономаренко В. И. Формирование мультистабильности, классификация изомеров и их эволюция в связанных фейгенбаумовских системах // Изв. вузов. Сер. Радиофизика, 1991, т. 34, № 1, с. 35–39.
- [19] Анищенко В. С., Арансон И. С., Постнов Д. Э., Рабинович М. И. Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // Докл. АН СССР, 1986, т. 286, вып. 5, с. 1120–1124.
- [20] Osipov G. V., Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Kurths J. Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rossler oscillators // Phys. Rev. E, 1997, vol. 55, pp. 2353–2361.
- [21] Shabunin A. V., Astakhov V. V., Anishchenko V. S. Developing chaos on base of traveling waves in a chain of coupled oscillators with period-doubling: Synchronization and hierarchy of multistability formation // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2002, vol. 12, no. 8, pp. 1895–1908.
- [22] Анищенко В. С., Астахов В. В. Экспериментальное исследование механизма возникновения и структуры странного аттрактора в генераторе с инерционной нелинейностью // Радиотехника и электроника, 1983, т. 28, № 6, с. 1109–1115.
- [23] Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
- [24] Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 584 с.
- [25] Астахов В. В., Безручко Б. П., Гуляев Ю. В., Селезнёв Е. П. Мультистабильные состояния диссипативно-связанных фейгенбаумовских систем // Письма в ЖТФ, 1988, т. 15, № 3, с. 60–64.
- [26] Шабунин А. В., Акопов А. А., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е. Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде // Изв. вузов. ПНД, 2005, т. 13, № 4, с. 57–55.
- [27] Shabunin A., Feudel U. and Astakhov V. Phase multistability and phase synchronization in an array of locally coupled period-doubling oscillators // Phys. Rev. E, 2009, v. 80, 026211.